

Ensembles et applications

Feuille accompagnatrice

1) Cogitos

Pré-chapitre

- Écrire et compter les parties de $E = \{a, b, c\}$. Combien un ensemble de n éléments admet-il de parties ? Pourquoi ?
- En écrivant $z = e^{i\theta}$, résoudre $z^4 = 1$ dans $\mathbb{C}$. Placer les solutions dans le plan. Quelle configuration prévoit-on pour les solutions de $z^n = 1$?
- Comment justifier l'égalité $\{x^2, x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$?
Le premier ensemble se lit « l'ensemble des x^2 , pour $x \in \mathbb{R}$ », le second se lit « l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tels que $y \geq 0$ ».
Indication : Il y a deux choses distinctes à dire.
- Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante. Est-il vrai que tout élément de $\mathbb{R}$ admet au moins un antécédent par f ? au plus un antécédent par f ?
- Si f est strictement croissante et $f(f(0)) = f(0)$, a-t-on nécessairement $f(0) = 0$?
- Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$, est-ce que tout élément de $\mathbb{R}$ admet au moins un antécédent par f ?
Si non, quelle hypothèse supplémentaire ajouter sur f ?
- Parmi 5 entiers, il y en a-t-il forcément deux congrus modulo 4 ? deux congrus modulo 5 ?

Post-chapitre

- À quelle condition sur $n, m \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$. Faire un dessin.
Que dire de $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$?
- Donner un exemple d'application pour laquelle $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
Indication : On a toujours $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
L'égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est-elle vraie pour toutes les applications injectives ? surjectives ?
- Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$. Si $g \circ f$ est bijective, que peut-on nécessairement conclure sur f et sur g ?
- Donner un exemple de deux fonctions non bijectives telles que $g \circ f = \text{Id}$.
Indication : Chercher des applications $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par exemple. Il faut que f soit injective et g surjective.
- Si g est bijective et $g \circ f = \text{Id}$, a-t-on nécessairement $f = g^{-1}$? Pourquoi ?
Indication : Utiliser g^{-1} , qui existe.
- Quelle est la réciproque de l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \{0, 1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$?
- Une partition de E étant donnée, on pose $x \sim y$ lorsque x et y appartiennent à une même partie de la partition. $\sim$ est-elle une relation d'équivalence ?

[Lien vers des QCMS](#)

2) Présentation du chapitre

La première partie du chapitre porte sur les ensembles. L'objectif est principalement d'acquérir la méthode de démonstration d'égalité d'ensembles, illustré sur quelques exemples d'ensembles qui sont décrits ou bien par des paramétrisations ($\{x^2, x \in \mathbb{R}\}$), ou bien en compréhension ($\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$).

La deuxième partie du chapitre sera traitée après le chapitre sur le calcul algébrique. Elle porte sur les applications f entre deux ensembles quelconques A et B , et leurs propriétés :

- injectivité (tout élément de B admet au plus un antécédent), surjectivité (tout élément de B admet au moins un antécédent)
- bijektivité, propriétés de la réciproque f^{-1} .
- images directes et réciproques de parties de A et B par f .

Une dernière courte partie sur la notion de relation binaire et de relation d'équivalence. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est le choix, pour chaque couple $(x, y) \in E^2$ de mettre x et y « en relation » ou non. Formellement, c'est une partie de E^2 , avec la convention que les couples de cette partie sont les éléments en relation.

3) Résultats, démonstrations et méthodes importantes

- $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$, démonstration
- Démonstration de la paramétrisation de $\mathbb{U}_n : \{e^{2ik\pi/n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$
- méthode : démontrer l'égalité d'ensembles
- surjection/injection/bijection : définition formelles, propriétés diverses (démonstrations), méthodes
- Images directes et réciproques : revoir les démonstrations des propriétés
- théorème de la bijection continue sur un intervalle
- démontrer qu'une relation est une relation d'équivalence
- périodicité APCR d'un système dynamique sur un ensemble fini.

4) Correction des cogitos

Pré-chapitre

1. $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$. Il y a 2^n parties : pour chaque élément, deux choix indépendants, le prendre ou non.
2. $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$. Plus généralement, les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.
3. Tout carré réel est positif ou nul. Réciproquement, si $y \geq 0$, alors $y = (\sqrt{y})^2$.
4. Tout réel admet *au plus* un antécédent, on dit que f est injective. Il n'en admet pas nécessairement un : $x \mapsto e^x$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais les réels négatifs n'ont pas d'antécédent.
5. Si f est strictement croissante, elle est injective, donc quand $f(a) = f(b)$ on peut conclure $a = b$. Ici, on obtient $f(0) = 0$.
6. Non, on peut imaginer que la fonction est croissante, mais qu'elle « saute » un ensemble de valeurs. Il faut ajouter la condition de continuité de f pour conclure.
7. Oui modulo 4, par le principe des tiroirs : il n'y a que 4 restes

possibles modulo 4, donc au moins deux des entiers ont le même reste. Non modulo 5 : les entiers 0, 1, 2, 3, 4 ont des restes distincts.

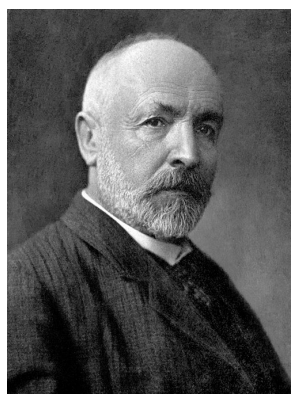
Post-chapitre

1. $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$ si et seulement si $n \mid m$. De plus,

$$\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{\text{pgcd}(n,m)}.$$

2. Prendre $f: x \mapsto x^2$, $A = \{-1\}$ et $B = \{1\}$: $f(A \cap B) = \emptyset$, mais $f(A) \cap f(B) = \{1\}$. L'égalité est toujours vraie si f est injective ; la surjectivité ne suffit pas.
3. Nécessairement, f est injective et g est surjective. On ne peut pas conclure en général que f ou g est bijective.
4. Poser $f(n) = n + 1$, puis $g(0) = 0$ et $g(n + 1) = n$. Alors ni f ni g n'est bijective, mais $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.
5. Oui. En composant $g \circ f = \text{Id}$ à gauche par g^{-1} , on obtient $f = g^{-1}$.
6. À une fonction $\varphi: E \rightarrow \{0, 1\}$, l'application réciproque associe la partie $\{x \in E \mid \varphi(x) = 1\}$.
7. Oui : la relation est réflexive, symétrique et transitive. Ses classes d'équivalence sont exactement les parties de la partition.

5) Perspectives historiques et culturelles



Georg Cantor (1845 – 1918), mathématicien allemand.

Il introduit la théorie des ensembles et fonde l'étude mathématique des différentes tailles d'infini.

Classification des ensembles

D'un point de vue de la théorie des ensembles, deux ensembles sont « les mêmes » s'il existe une application bijective entre les deux. Une question naturelle étudiée par Cantor est la classification des ensembles : « comment décrire tous les ensembles distincts ? »

Pour ce qui est des ensembles finis, la réponse est simple : deux ensembles sont en bijection si et seulement si ils ont le même nombre d'éléments. Les ensembles finis sont donc classifiés par leur cardinal.

La question des ensembles infinis est beaucoup plus subtile. Certains éléments seront étudiés en DM.

Le résultat suivant peut-être sembler surprenant :

Théorème Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont en bijection.

Autrement dit, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, et une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. Du point de vue de la théorie des ensembles, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont « égaux ». Cela contredit l'intuition que l'on peut se faire de ces deux ensembles, parce qu'on a l'habitude de les « connaître » avec des informations supplémentaires, qui dépassent le point de vue ensembliste :

- le point de vue arithmétique : les structures additives et multiplicatives de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont très différentes.
- le point de vue topologique, c'est-à-dire de la notion de distance entre les éléments.

Il est finalement plus compliqué de montrer que deux ensembles infinis sont « distincts ».

Théorème Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas en bijection. L'ensemble $\mathbb{R}$ est « plus grand » que $\mathbb{N}$.

Cantor établit une classification des ensembles, à bijection près, par une hiérarchie infinie d'objets appelés cardinaux, qui généralise l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ (qui sont les cardinaux des ensembles finis).

Remarquablement, à chaque cardinal est associé un cardinal « suivant ». Le premier cardinal infini est $\aleph_0$, le cardinal de $\mathbb{N}$. Sous l'hypothèse du continu, le second cardinal est le cardinal de $\mathbb{R}$, noté $\aleph_1$.